

§ 5.1 等价关系

(核心思想: 归类分析)

定义5.1 设 R 是定义在非空集合 A 上的一个二元关系, 当 R 同时具有自反、对称和传递性质时, 称 R 是 A 上的一个等价关系。

例5.1:

1) 在全体中国人所组成的集合上定义的“同姓”关系, 就是具备自反的、对称的、传递的性质, 因此, 就是一个等价关系;

2) 对任何集合 A , 考虑 $R = A \times A$, 则 R 是 A 上的等价关系;

3) 三角形的“相似关系”、“全等关系”等都是等价关系;

4) 直线的“平行关系”不是等价关系, 因为它们不是自反的。

5) 幂集上定义的“ $\subseteq$ ”, 整数集上定义的“ $\leq$ ”都不是等价关系, 因为它们不是对称的。

6) “朋友”关系, 则不是等价关系, 因它不是传递的。

例5.2:

设 m 为正整数, 考虑整数集 Z 上的关系如下:

$$R = \{(x, y) | x, y \in Z \wedge (m | (x - y))\}$$

证明 R 是一个等价关系。

证明: 1) 对任意 $x \in Z$, 有 $m | (x - x)$, 所以 $(x, x) \in R$, 即 R 是自反的。

2) 对任意 $x, y \in Z$, 若 $(x, y) \in R$, 即 $m | (x - y)$, 所以 $m | (y - x)$, 因此, $(y, x) \in R$, 即 R 是对称的。

3) 对任意 $x, y, z \in Z$, 若 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$, 有 $m | (x - y)$ 且 $m | (y - z)$, 所以由 $(x - y) = (x - y) + (y - z)$ 得 $m | (x - z)$, 所以 $(x, z) \in R$, 即 R 是传递的。

以 m 为模的同余关系 ★

上例中 R 称为 Z 上以 m 为模的同余关系, 一般记 xRy 为:

$$x \equiv y \pmod{m}$$

称为同余式。

此时, R 将 Z 分成了如下 m 个子集:

$$\{\dots, -3m, -2m, -m, 0, m, 2m, 3m, \dots\}$$

$$\{\dots, -3m+1, -2m+1, -m+1, 1, m+1, 2m+1, 3m+1, \dots\}$$

$$\{\dots, -3m+2, -2m+2, -m+2, 2, m+2, 2m+2, 3m+2, \dots\}$$

...

$$\{\dots, -2m-1, -m-1, 1-m, 1, 2m-1, 3m-1, 4m-1, \dots\}$$

每个元素以 m 为模其余数均为0

每个元素以 m 为模其余数均为1

m 整除 $(x-y)$, 即: $(x-y)$ 是 m 的倍数

证明关系 $R = \{(x, y) | x, y \in Z \wedge (m | (x - y))\}$ 是等价关系, 只需要按等价关系的定义——同时满足自反性、对称性和传递性, 逐一验证即可。

先明确关键概念

• 整数集合: 所有整数 $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ 的集合。

• $m | (x - y)$: 读作“ m 整除 $(x - y)$ ”, 意思是存在整数 k , 使得 $x - y = m \cdot k$ (即 x 和 y 除以 m 的余数相同, 也叫“ x 与 y 模 m 同余”)。

• 等价关系定义: 若关系 R 满足以下3条性质, 则为等价关系:

1. 自反性: 对任意 $x \in Z$, $(x, x) \in R$;

2. 对称性: 对任意 $x, y \in Z$, 若 $(x, y) \in R$, 则 $(y, x) \in R$;

3. 传递性: 对任意 $x, y, z \in Z$, 若 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$, 则 $(x, z) \in R$ 。

逐一验证3条性质 (核心证明过程)

1. 验证自反性: 对任意 $x \in Z$, $(x, x) \in R$

证明: $(x, x) \in R$, 只要证 $m | (x - x)$ 。

因 $x - x = 0$, 而任何正整数 m 都能整除0 (存在整数 $k = 0$, 使得 $0 = m \cdot 0$), 故 $m | (x - x)$ 。

因此, $(x, x) \in R$, 自反性成立。

2. 验证对称性: 若 $(x, y) \in R$, 则 $(y, x) \in R$

已知 $(x, y) \in R$, 根据 R 的定义, 得 $m | (x - y)$ 。

由“整除的性质”, 得 $m | (-x + y)$, 即 $m | (y - x)$ 。

此即 $m | (y - x)$, 故 $m | (y - x) = y - x$, 即 $m | (y - x)$ 。

因此, $(y, x) \in R$, 对称性成立。

3. 验证传递性: 若 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$, 则 $(x, z) \in R$

已知 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$, 根据 R 的定义:

• $m | (x - y)$: 存在整数 k_1 , 使得 $x - y = m \cdot k_1$;

• $m | (y - z)$: 存在整数 k_2 , 使得 $y - z = m \cdot k_2$ 。

将两式相加: $(x - y) + (y - z) = m \cdot k_1 + m \cdot k_2$, 化简得:

$$x - z = m \cdot (k_1 + k_2)$$

因 k_1, k_2 是整数, 其和 $k_1 + k_2$ 也是整数, 故 $m | (x - z)$ 。

因此, $(x, z) \in R$, 传递性成立。

总结

关系 R 同时满足自反性、对称性和传递性, 因此 R 是整数集合 Z 上的等价关系。

这个关系其实是数学中的“模 m 同余关系”, 我们可以帮它进一步讲解它的等价类划分 (比如 $m=2$ 时, 将整数分为奇数和偶数两类), 需要展开说明吗?

这 m 个 Z 的子集具有的特点: 在同一个子集中的元素之间都有关系 R , 而不同子集的元素之间无关系 R 。也就是说, 通过等价关系, 将集合分成若干子集, 使这些子集构成的集合就是 Z 的一个划分。

事实上, 对任意正整数 m , Z 的任意非空子集 A , 关系 $R = \{(x, y) | (x, y) \in A \wedge (m | (x - y))\}$ 都是 A 上的等价关系。

定义5.2 设 R 是集合 A 上的等价关系, 对任意 $a \in A$, 记

$[a]_R = \{x | (x \in A) \wedge (x, a) \in R\}$, 称 A 的子集 $[a]_R$ 为关系 R 的一个等价类, 或叫作由 a 生成的一个 R 等价类。其中 a 称为 $[a]_R$ 的生成元 (或叫代表元, 或典型元)。

在不会引起混淆时, 简记为 $[a]$

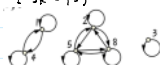
eg. 5.4 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$, 考虑 R 是 A 上以3为模的同余关系, 求其等价类

解: 由eg 5.2知, R 为一个等价关系, 为比可求 $[x]_R (x \in A)$

$$[1]_R = \{1, 4\} = [4]_R$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$

$$[3]_R = \{3\}$$



定理5.1 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

① 对任意 $a, b \in A$, 或者 $[a] = [b]$ 或者 $[a] \cap [b] = \emptyset$;

② $\bigcup [a] = A$

定理5.1 设R是非空集合A上的等价关系,则

① 对任意 $a, b \in A$, 或者 $[a] = [b]$ 或者 $[a] \cap [b] = \emptyset$;

② $\bigcup_{a \in A} [a] = A$

证明: ① 任意给定 $a, b \in A$. 若 $[a] \cap [b] = \emptyset$, 则已得证. 若 $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, 则存在A的元素

$x \in [a] \cap [b]$. 于是 $x \in [a]$ 且 $x \in [b]$, 故有 xRa 且 xRb ; 又由于R是对称的, 于是 aRx 且 xRb ;

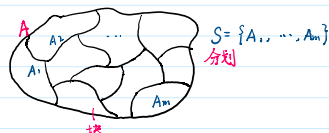
又R是传递的, 故 aRb . 因此, 对任意 $y \in [a]$ 必有 yRa , 而 aRb , 故 yRb , 即 $y \in [b]$.

因此得到 $[a] \subseteq [b]$. 同理可证 $[b] \subseteq [a]$, 故 $[a] = [b]$.

② 显然成立. ■

这个定理告诉我们, 集合A上一个等价关系决定了集合元素的一种聚类方式, 即分割集合的方式.

集合的划分



例: 设集合 $A = \{a, b, c\}$, 则: $S_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$,

$S_2 = \{\{a, b, c\}\}$,

$S_3 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$,

$S_4 = \{\{b\}, \{a, c\}\}$,

$S_5 = \{\{c\}, \{a, b\}\}$ 都是A的划分, 并且由A只能产生这5个不同的划分.

定理5.2 设非空集合A的每个等价关系都能决定A的一个划分, 而A的每个划分都能导出A上的一个等价关系.

定理5.2建立了集合上等价关系与划分的紧密联系

证明: 定理的第一部分结论由定理5.1就可以得到.

对于第二部分, 设 $S = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_m\}$ 是A上的任意一个划分 (现在定义关系R如下:

即是说, $(a, b) \in R$ 当且仅当a和b同属某个 A_i . 我们证明这样定义的关系R是一个等价关系. 由于S是A的划分, 因此对任何 $a \in A$, 皆有 aRa , 即R是自反的. 如果 aRb , 那么存在 A_i , 使 $(a, b) \in A_i$, 从而又有 bRa , 这说明R是对称的. 如果同时有 aRb 和 bRc , 且 $(a, b) \in A_i$, $(b, c) \in A_j$. 由于当 $i \neq j$ 时 $A_i \cap A_j = \emptyset$, 所以必然 $A_i = A_j$, 即 $(a, c) \in A_i$ 也就是 aRc 成立. 这说明R是传递的. 因此, R是由划分S导出的一个等价关系. ■ (顺序关系) 集合上自反、可传递、反对称关系

定义5.4: 设R是集合A上的自反的、反对称的、传递的关系, 则称R是A上的偏序关系 (记为“ $\leq$ ”, 读作“小于等于”). 序偶 $\langle A, R \rangle$ 称为偏序集. 容易证明: 偏序 $\leq$ 的逆关系 $\geq$ 也是一个偏序, 我们用“ $\geq$ ”表示, 读作“大于等于”.

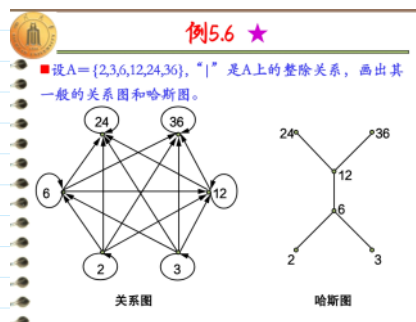
集合A的幂集 2^A 上定义的“ $\subseteq$ ”是偏序关系. $\langle 2^A, \subseteq \rangle$ 是偏序集.

实数集合R上定义的“ $\leq$ ”是偏序关系, $\langle R, \leq \rangle$ 是偏序集.

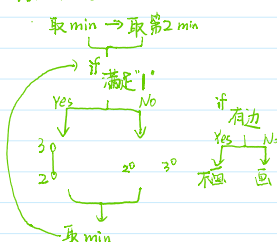
大于零的自然数集合 N^+ 上定义的“整除”关系“|”也是一个偏序关系, $\langle N^+, | \rangle$ 是偏序集.

偏序集的哈斯图

- ① 略去环
- ② $x \leq y$ 则将x画在y下方
- ③ $i \rightarrow j, j \rightarrow k$, 省 $i \rightarrow k$.



程序实现哈斯图





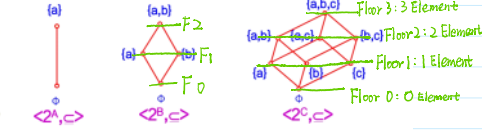
例5.7 ★

■ 设集合 $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, c\}$ 。分别画出集合 A 、 B 、 C 、 D 之幂集 2^A 、 2^B 、 2^C 上定义的 “ $\subseteq$ ” 的哈斯图。

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}\}$$

$$2^B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$2^C = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$



定义5.5 设 $\langle A, \preceq \rangle$ 是一个偏序集，对任意 $x, y \in A$ ，如果 $x \preceq y$ 或 $y \preceq x$ 之一成立，则称 x 与 y 是可比较的。否则， x 与 y 是不可比较的。

沿着 Hasse 图向上走，碰到就可比。

例5.24

集合 $A = \{a, b, c\}$ ，偏序集 $\langle 2^A, \subseteq \rangle$ 中， $\{a\}$ 与 $\{a, b\}$ 是可比的， $\{a\}$ 与 $\{b, c\}$ 是不可比的。

偏序集 $\langle R, \leq \rangle$ 中，对任意 $x, y \in A$ ， x 与 y 都是可比的。

偏序集 $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ 中，对任意 $x, y \in A$ ， x 与 y 都是可比的。

偏序集 $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ 中，2 与 3 不是可比的；2 与 6 是可比的；2 与 8 是可比的；对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ ，0 与 n 是可比的。

§ 5.3 全序集与良序集

定义5.6 如果偏序集 $\langle A, \preceq \rangle$ 中任何两个元素都是可比较的，则称 $\langle A, \preceq \rangle$ 是全序集，称 $\preceq$ 为 A 上的一个全序关系。

例：实数集合上的 “ $\leq$ ” 关系是全序关系。

定义5.7 设 $\langle A, \preceq \rangle$ 是一个偏序集， $B \subseteq A$ 。如果 $\langle B, \preceq \rangle$ 是一个全序子集，则称 B 为 A 中的一条链。链中元素数目减1称为该链的长度。

例： $\{36, 12, 6, 3\}$ 是偏序集 $\langle \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}, | \rangle$ 的一条长度为3的链。

定义5.8

设 $\langle A, \preceq \rangle$ 是偏序集， a 是 A 的一个元素。

- 1) 若对任意 $b \in A$ ，都有 $b \preceq a$ ，则称 a 为 A 中的最大元。
- 2) 若对任意 $b \in A$ ，都有 $a \preceq b$ ，则称 a 为 A 中的最小元。
- 3) 若对任意 $b \in A$ ，或者 $b \preceq a$ ，或者 b 与 a 不可比较，则称 a 为 A 中的极大元。
- 4) 若对任意 $b \in A$ ，或者 $a \preceq b$ ，或者 b 与 a 不可比较，则称 a 为 A 中的极小元。

显然，有限偏序集总存在极大元和极小元。

定义5.9 设 $B \subseteq A$ ， $a \in A$ 。

若对任意 $b \in B$ ，都有 $b \preceq a$ ，则称 a 为 B 的上界。

若对任意 $b \in B$ ，都有 $a \preceq b$ ，则称 a 为 B 的下界。

若元素 $c \in A$ 是 B 的任何一个上界，若均有 $a \preceq c$ ，则称 a 为 B 的最小上界。

若元素 $c \in A$ 是 B 的任何一个下界，若均有 $c \preceq a$ ，则称 a 为 B 的最大下界。

■ 例5.25 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ， $|$ 是 A 上的整除关系，则 $\langle A, | \rangle$ 是偏序集，考虑 A 的子集： $B_1 = \{1, 2, 3, 6\}$ ， $B_2 = \{2, 3, 5, 7\}$ ， $B_3 = A$ 。

求出 B_1 ， B_2 ， B_3 的最大(小)元、极大(小)元、上(下)界、最小上界、最大下界。

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	最小上界	最大下界
B_1	6	1	6	1	6	1	6	1
B_2	无	无	2, 3, 5, 7	2, 3, 5, 7	无	1	无	1
B_3	无	1	5, 6, 7, 8	1	无	1	无	1

■ 例5.26 设集合 $A = \{a, b, c\}$ ，考虑 $P(A)$ 上的关系 “ $\subseteq$ ”，则 $\langle P(A), \subseteq \rangle$ 是偏序集。求 2^A 的子集： $B_1 = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$ ， $B_2 = \{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ ， $B_3 = 2^A$ 的最大(小)元、极大(小)元、最小上界、最大下界。

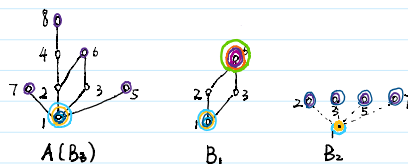
集合 B_1 的最小元是 $\{b\}$ ，极大元是 $\{a, b\}$ 和 $\{b, c\}$ 。集合 B_2 的最小元是 $\{a\}$ 和 $\{c\}$ ，极大元是 $\{a, c\}$ 。集合 B_3 的最小元是 $\emptyset$ ，极大元是 2^A 。

■ 最大元 (每条路由共同终点) ■ 极大元 (每条路由终点, “群龙无首”) ■ 最小元 (每条路由共同起点) ■ 极小元 (每条路由起点, “群龙无首”)

在子集中取 (B) (未必在 B 中以 B 为 A)

在全集中取 (A)

■ 上界 (连接所有下级的结点) ■ 最小上界 ■ 下界 (连接所有上一级的结点) ■ 最大下界



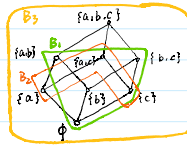
A1: PPT 中关于 B_2 的极大小元这些是正确的。

A2: 你的笔记非常好。按照你的这个思路可以这么理解：最大元是哈斯图中每一条“路”的共同终点，最小元是共同起点。但极大、极小就不宜这么解释了。

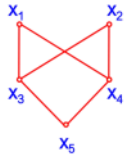
A3: 上界下界、最大下界和最小上界这些你的理解有误。不管是什么界，都是集合 A 中的元素。用我们课堂上说的“教学楼”那个例子来理解：我们教室中的天花板及其以上的那些都是我们的上界，显然最小上界就是大家头顶的天花板（在集合 A 中，不在 B 中）。但是，假如我们班上有个同学是站在桌子上的，那么显然他比教室任何人都高，那他他就是最小上界了（这个同学在集合 B 中，但他也是在集合 A 中）。这样解释你理解没？下次课我把你这个问题讲一下。

$\{c\}, \Phi\}$, $B_2 = \{\{a\}, \{c\}, \{a,c\}\}$, $B_3 = 2^A$ 的最大(小)元、极大(小)元、最小上界、最大下界。

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	最小上界	最大下界
B_1	无	Φ	$\{a,b\}, \{b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ
B_2	$\{a,c\}$	无	$\{a,c\}$	$\{a\}, \{c\}$	$\{a,c\}$	Φ	$\{a,c\}$	Φ
B_3	$\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ



■例5.27 设 $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, A 上定义偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 的哈斯图如下, 求 $B = \{x_3, x_4, x_5\}$ 的最大(小)元、极大(小)元、上(下)界、最小上界、最大下界。



解:

最大元: 无; 最小元: x_5 ;
极大元: x_3, x_4 ; 极小元: x_5 ;
上界: x_1, x_2 ; 下界: x_5 ;
最小上界: 无; 最大下界: x_5 。

■例5.28

1) 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上定义的关系

$$R = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle \}$$

是一个全序关系, $\langle A, \leq \rangle$ 的哈斯图如右图。

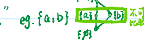


※用哈斯图判断全偏序集

全序关系的哈斯图必须是线性链结构: 所有节点能按“上下顺序”排成一列, 没有分支、没有并行节点(即每个节点最多只有1个直接前驱和1个直接后继)

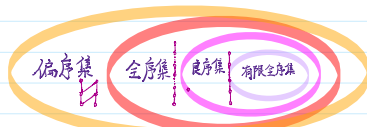
2) 实数集 R 上定义的“ $\leq$ ”是全序关系, $\langle R, \leq \rangle$ 是全序集。

3) 集合 $A = \{a\}$ 的幂集 2^A 上定义的“ $\subseteq$ ”是全序关系, $\langle 2^A, \subseteq \rangle$ 是全序集。若 $|A| \geq 2$, 则 $\langle 2^A, \subseteq \rangle$ 不是全序集。



字典次序 (Lexicographical Order) 是模仿字典排序规则的比较算法, 核心逻辑: 1. 从两个序列 (字符串、数组等) 的第一个元素开始逐位对比; 2. 若某位置元素不同, 元素值小的序列整体更小 (元素大小按预设规则定义, 如字符的ASCII码); 3. 若前面所有元素都相同, 长度短的序列整体更小; 4. 若元素完全相同且长度一致, 则两序列相等。

良序关系



定义5.10

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一个偏序集, 若 A 的任何一个非空子集都有最小元, 则“ $\leq$ ”称为良序关系, 简称良序, 此时 $\langle A, \leq \rangle$ 称为良序集。
由上述定义, 良序集的任何一个非空子集都有最小元, 所以, 对任意 $a, b \in A$, 集合 $\{a, b\}$ 有最小元, 所以有 $a \leq b$ 或 $b \leq a$, 因此, “ $\leq$ ”一定是全序关系。即:
“ $\leq$ ”是良序关系 $\Rightarrow$ “ $\leq$ ”是全序关系 $\Rightarrow$ “ $\leq$ ”是偏序关系 有限全序集 $\Rightarrow$ 良序集

有限偏序集到全(良)序集的转化

在实际问题中, 如程序控制流、数据分析流中, 有时需要把一个不是全序集的有限偏序集合转化成全序集, 或良序集, 这就涉及到由一种偏序关系转变成另一种偏序关系的问题。

定义5.11

设 $\leq_1, \leq_2$ 是集合 A 上的两个偏序关系。如果对 $\forall a, b \in A$, 当 $a \leq_1 b$ 时必导致 $a \leq_2 b$, 则称关系 $\leq_1, \leq_2$ 是可比较的。

例: ‘整除’和‘小于等于’是自然数集上的两个偏序关系, 而且‘|’和‘ $\leq$ ’是可比较的。

$\therefore$ 对任何 $a, b \in \mathbb{N}$, $a | b$ 时也有 $a \leq b$ 。

注意: 例中的‘|’是偏序而非全序, ‘ $\leq$ ’却是一个全序。

现在问:

对于任何一个有限偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 能否在 A 上定义一个全序‘ $\leq'$ ’使‘ $\leq'$ ’与‘ $\leq$ ’可比较?

答案是肯定的: 我们可以通过所谓‘拓扑排序’的过程来达到目的。

定义5.12 设 $\leq_1, \leq_2$ 是集合 A 上的两个偏序关系, 如果 $\leq_1$ 和 $\leq_2$ 是可比较的, 且 $\leq_2$ 是全序关系, 则称关系 $\leq_1$ 是关系 $\leq_2$ 的一个拓扑排序。由一个给定的有限偏序集构造全序集的拓扑排序算法: 输入: 偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 输出: 全序集 $\langle A, \leq' \rangle$

定义的全序为: 2 '3 '6 '12 '24 '36

由拓扑排序定义的全序关系是什么? 完全取决于极小元的选择方法。

如上例中也可以定义为: 3 '2 '6 '12 '36 '24, (因为在 $\langle 2, 3, 6, 12, 24, 36 \rangle, | \rangle$

中, 2和3是不可比的) 由此可得:

定理5.3:

任何有限偏序集都可以转变成全序集。

公理集合论中一个很重要的公理, 即关于整数的“良序公理”。

良序公理: 设 X 是 $\mathbb{Z}$ 的一个非空子集。如果存在 $a \in X$, 使得对所有的 $b \in X$, 都有 $a \leq b$, 则 X

从A中依次挑出
排最下面
直到没有为止

中必有一个最小整数。