

定义 4.1  $R$  是  $A$  到  $B$  一个确定的二元关系, 那么  $R$  是  $A \times B$  的一个子集  $R = \{(x, y) \in A \times B\}$  的子集合

$$\begin{cases} xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R \\ x \not R y \Leftrightarrow (x, y) \notin R \end{cases}$$

"模 3 同余":  $\%3 = \text{same}$

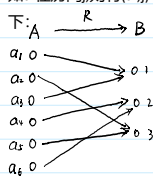
例 3: 设  $A$  和  $B$  是两个集合, 那么  $A \times B$  的子集  $\emptyset$  和  $A \times B$  自身是  $A$  到  $B$  的两个二元关系, 分别称为空关系和全关系。

### 关系的表示法

1. 集合表示法 { 枚举法  
叙述法

2. 关系图法 (有向图表示法)

2) 设  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_6\}$  是六个人,  $B = \{1, 2, 3\}$  是三套房间, 考虑  $A$  到  $B$  之间的一种住宿关系  $R$ , 如  $a_i$  住房间  $j$ , 则有  $(a_i, j) \in R$ . 现假设:  $R = \{(a_1, 1), (a_2, 3), (a_3, 1), (a_4, 2), (a_5, 3), (a_6, 2)\}$  则此关系  $R$  的关系图如



3. 关系矩阵表示法

$M_R = (r_{ij})_{n \times m}$  为关系  $R$  的关系矩阵/邻接矩阵 (布尔矩阵)

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

### 关系的性质

定义 4.2 设  $R$  是  $A$  上二元关系.

1)  $\forall x \in A, (x, x) \in R$ , 则  $R$  自反/自反性.

$$\forall x ((x \in A) \rightarrow ((x, x) \in R)) = 1$$

P.S. 自反性不满足

2)  $\forall x ((x \in A) \rightarrow ((x, x) \notin R)) = 1$ , 则  $R$  反自反/反自反性

自反

### 结论

任何不是自反的关系未必一定是反自反的关系, 反之亦然。即存在既不是自反的也不是反自反的关系。

表现在关系图上: 关系  $R$  是自反的, 当且仅当其关系图中每个结点都有环; 关系  $R$  是反自反的, 当且仅当其关系图中每个结点都无环。

表现在关系矩阵上: 关系  $R$  是自反的, 当且仅当其关系矩阵的主对角线上全为 1; 关系  $R$  是反自反的当且仅当其关系矩阵的主对角线上全为 0。

定义 4.3 设  $R$  是  $A$  上的二元关系

1)  $R$  在  $A$  上对称  $\Leftrightarrow \forall x \forall y ((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (x, y) \in R) \rightarrow ((y, x) \in R) = 1$

2)  $R$  在  $A$  上反对称  $\Leftrightarrow \forall x \forall y ((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge ((x, y) \in R) \wedge (y, x) \in R) \rightarrow (x = y) = 1$

对称

### 结论

任何不是对称的关系未必一定是反对称的关系, 反之亦然。即存在既不是对称的也不是反对称的关系, 也存在既是对称的也是反对称的关系。

表现在关系图上: 关系  $R$  是对称的当且仅当其关系图中, 任何一对结点之间, 要么有方向相反的两条边, 要么无任何边; 关系  $R$  是反对称的当且仅当其关系图中, 任何一对结点之间, 至多有一条边。

表现在关系矩阵上: 关系  $R$  是对称的当且仅当其关系矩阵为对称矩阵, 即  $r_{ij} = r_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ; 关系  $R$  是反对称的当且仅当其关系矩阵为反对称矩阵, 即  $r_{ij} \cdot r_{ji} = 0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $i \neq j$ 。

定义 4.4  $\forall x, y, z \in A$ . 如果  $(x, y) \in R$  且  $(y, z) \in R$ , 那么  $(x, z) \in R$ , 则称关系  $R$  是传递的

$R$  在  $A$  上传递  $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z ((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (z \in A) \wedge ((x, y) \in R) \wedge (y, z) \in R) \rightarrow ((x, z) \in R) = 1$

传递

mod

$n \bmod d = j$ :  $n$  模  $d$  余  $j$

$n \equiv m \pmod{d}$ :  $m$  和  $n$  (关于模  $d$ ) 是同余的

$xRy$  等价  $x \equiv y \pmod{m}$   $m$  为确定的整数

$R$  是对称的、自反的、传递的关系, 但不是反自反的和反对称的

表现在关系图上: 关系  $R$  是传递的当且仅当其关系图中, 任何三个结点  $x, y, z$  (可以相同)

之间, 若从x到y有一条边存在, 从y到z有一条边存在, 则从x到z一定有一条边存在。

表现在关系矩阵上: 关系R是传递的当且仅当其关系矩阵中, 对任意i、j和k∈{1,2,3,...,n}, 若 $r_{ij}=1$ 且 $r_{jk}=1$ , 必有 $r_{ik}=1$ 。



$$\checkmark R_1 = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$$

※ 判断是否具有传递性:

$$\times R_2 = \{(1,2), (2,3)\}$$

求TA的传递闭包, 若与TA相同, 则具有传递性。

$$\checkmark R_3 = \{(1,2)\}$$

$$R_4 = \{(1,1), (2,2)\}$$

$$R_5 = \{(1,1), (1,2)\}$$

定义4.5  $R: A \rightarrow B, S: B \rightarrow C$ , 则  $R \circ S$  是从A到C关系

(R与S的复合/合成关系)

$$R \circ S = \{(x,z) | (x \in A) \wedge (z \in C) \wedge \exists y ((y \in B) \wedge (xRy) \wedge (ySz))\}$$

复合运算

R与S的复合关系 (合成关系)  $R \circ S$  也可以用矩阵来表示。设R, S都是集合A = {a1, a2, a3, ..., an}上的二元关系,  $M_R = (r_{ij}), M_S = (s_{ij}), M_{R \circ S} = (m_{ij})$  则  $M_{R \circ S} = M_R * M_S$  这里的“\*”运算类似矩阵乘法运算, 但须将元素间的乘法改成逻辑与, 将加法改成逻辑或, 即  $m_{ij} = (r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \dots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})$

### 例12:

$$\text{设 } R = \{(1,2), (3,4), (2,2)\}$$

$$S = \{(4,2), (2,3), (3,1)\},$$

分别是定义为从A→B和从B→C的关系,

其中A=B=C={1,2,3,4}。

1) 用集合方法求  $R \circ S, S \circ R, R \circ R, S \circ S$ 。则:

$$R \circ S = \{(1,3), (3,2), (2,3)\};$$

$$S \circ R = \{(4,2), (2,4), (3,2)\};$$

$$R \circ R = \{(1,2), (2,2)\};$$

$$S \circ S = \{(4,3), (2,1)\}。$$

2) 用关系图 (略)

3) 用关系矩阵

$$M_{R \circ S} = M_R * M_S$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

※ 不满足交换性, 具可结合性

### 关系的幂

$$R^0 = I_A = \{(a,a) | a \in A\}$$

$$R^1 = R$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n$$

! 不代表满足交换律

易证,  $R^m \circ R^n = R^{m+n}, (R^m)^n = R^{mn}$

### 关系的逆运算

定义4.6 设R是一个从集合A到集合B的二元关系, 则从B到A的关系  $R^{-1} = \{(b,a) | (a,b) \in R\}$  称为R的逆关系, 运算“-1”称为逆运算。注意: 关系是一种集合, 逆关系也是一种集合, 因此, 如果R是一个关系, 则R-1和 $\bar{R}$ 都是关系, 但R-1和 $\bar{R}$ 是完全不同的两种关系, 千万不要混淆。



### 例4.13

设A = {a,b,c,d}, B = {1,2,3}, R是从A到B的一个关系,

$$R = \{(a,1), (b,3), (c,2), (d,2)\},$$

则:  $R^{-1} = \{(1,a), (2,c), (2,d), (3,b)\}$

$$\bar{R} = \{(a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (c,1), (c,3), (d,1), (d,3)\}。$$

■ 如用关系图表示逆关系, 则仅将关系图中的有向边的方向改变成相反方向。

■ 如用关系矩阵表示逆关系, 则  $M_{R^{-1}} = M_R^T$ 。

### 关系运算的性质

定理4.1  $R: A \rightarrow B, S: B \rightarrow C, T: C \rightarrow D$ , 则:

$$1) (R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

$$2) (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

证: 1) 设  $(a,d) \in (R \circ S) \circ T$ , 则知至少存在  $c \in C$ , 使  $(a,c) \in R \circ S, (c,d) \in T$

又对  $(a,c) \in R \circ S$ , 知至少存在  $b \in B$ , 使  $(a,b) \in R, (b,c) \in S$

$$\therefore (b,c) \in S, (c,d) \in T$$

$$\therefore (b,d) \in S \circ T$$

$$\therefore (a,b) \in R, (b,d) \in S \circ T$$

$$\therefore (R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T)$$

同理, 设  $(a,d) \in R \circ (S \circ T)$ , 则知至少存在  $b \in B$ , 使  $(a,b) \in R, (b,d) \in S \circ T$

又对  $(b,d) \in S \circ T$ , 知至少存在  $c \in C$  使  $(b,c) \in S, (c,d) \in T$

$$\therefore (a,b) \in R, (b,c) \in S$$

$$\therefore (a,c) \in R \circ S$$

$$\therefore (a,c) \in R \circ S, (c,d) \in T$$

$$\therefore R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T$$

综上,  $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

2) 采用谓词公式的等价式进行证明。

$$\checkmark (c,a) \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow (a,c) \in R \circ S$$

任取c,a, 使

$$\Leftrightarrow (\exists b \in B) ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S)$$

2) 采用谓词公式的等价式进行证明.

$$\begin{aligned} \because (c, a) \in (R \circ S)^{-1} &\Leftrightarrow (a, c) \in R \circ S \\ \text{任取 } c, a, \text{ 使} &\Leftrightarrow (\exists b \in B) (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S \\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B) (b, a) \in R^{-1} \wedge (c, b) \in S^{-1} \\ \therefore (R \circ S)^{-1} &\subseteq (S^{-1} \circ R^{-1}) \Leftrightarrow (c, a) \in (S^{-1} \circ R^{-1}) \\ \therefore (R \circ S)^{-1} &= S^{-1} \circ R^{-1} \quad \text{同理可证 } (S^{-1} \circ R^{-1}) \subseteq (R \circ S)^{-1} \end{aligned}$$

★ 定理 4.2 设  $R, S, T$  是集合  $A$  上的二元关系, 则:

- 1)  $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$
- 2)  $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$
- 3)  $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$
- 4)  $(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$

证明: 1) 设任意  $(x, z) \in R \circ (S \cup T)$ , 则知  
必存在  $y \in A$  使  $(x, y) \in R$  且  $(y, z) \in (S \cup T)$ .  
即:  $(x, y) \in R$  且  $(y, z) \in S$   $\vee$   $(x, y) \in R$  且  $(y, z) \in T$   
也就是  $(x, z) \in (R \circ S)$   $\vee$   $(x, z) \in (R \circ T)$   
则有  $(x, z) \in (R \circ S) \cup (R \circ T)$   
即  $R \circ (S \cup T) \subseteq (R \circ S) \cup (R \circ T)$   
同理可证  $(R \circ S) \cup (R \circ T) \subseteq R \circ (S \cup T)$   
故  $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$   
2) 设任意  $(x, z) \in R \circ (S \cap T)$ , 则知  
必存在  $y \in A$  使  $(x, y) \in R$  且  $(y, z) \in (S \cap T)$   
即  $(x, y) \in R$  且  $(y, z) \in S$   $\wedge$   $(x, y) \in R$  且  $(y, z) \in T$   
也就是  $(x, z) \in (R \circ S)$   $\wedge$   $(x, z) \in (R \circ T)$   
则有:  $(x, z) \in (R \circ S) \cap (R \circ T)$

- 定理 4.3
- 1)  $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
  - 2)  $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
  - 3)  $(R^{-1})^{-1} = R$
  - 4)  $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
  - 5)  $(R^{-1})^{-1} = R$

二元关系的闭包 “缺啥补啥” “过犹不及”

定义 4.7 设  $R$  是定义在  $A$  上的二元关系, 如果另有  $A$  上的关系  $R'$  满足:

- 1)  $R'$  是自反的(或对称的、或可传递的),
- 2)  $R \subseteq R'$ ,
- 3) 对  $A$  上任何其它满足 1) 和 2) 的关系  $R''$ , 则:

$R' \subseteq R''$ 。(表明  $R'$  的最小性)

则称  $R'$  为  $R$  的自反闭包(或对称闭包、或传递闭包), 分别记为  $r(R)$ ( $s(R)$  或  $t(R)$ )。

★ 定理 4.5

- 1)  $r(R) = R \cup I_A$
- 2)  $s(R) = R \cup R^{-1}$
- 3)  $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

没有计算法

|   | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 0 | 0 | 0 |
| b | 0 | 0 | 0 | 1 |
| c | 1 | 0 | 1 | 0 |
| d | 0 | 1 | 0 | 0 |

第 k 次  
k 行为 1 所到, 则  
列 约, 横  
0 → 1

k=1

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |

k=2

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |

k=1, 2, ...

求一个关系的自反闭包,

即将图中的所有无环的节点加上环;  
关系矩阵中对角线上的值  $r_{ij}$  全变为“1”。

求一个关系的对称闭包,

则在图中, 任何一对节点之间, 若仅存在一条边, 则加一条方向相反的另一条边;  
关系矩阵中则为: 若有  $r_{ij} = 1 (i \neq j)$ , 则令  $r_{ji} = 1$  (若  $r_{ji} = 1$ , 即  $M_s(R) = M_{RVM} R^{-1} \wedge 1$ 。

求一个关系的传递闭包,

则在图中, 对任意节点  $a, b, c$ , 若  $a$  到  $b$  有一条边, 同时  $b$  到  $c$  也有一条边, 则从  $a$  到  $c$  必增加一条边  
(当  $a$  到  $c$  无边时);

在关系矩阵中, 若  $r_{ij} = 1, r_{jk} = 1$ , 则令  $r_{ik} = 1$  (若  $r_{ik} = 1$ ),

3) 证明 (数学归纳法)

令  $R^1 = R$ , 并证  $R^i \subseteq t(R)$

证: 对  $\forall i, R^i \subseteq t(R)$

其次,  $\because R^i \subseteq t(R) \therefore R^i \subseteq (R \cup R^2 \cup \dots) \therefore R^i \subseteq R \cup R^2 \cup \dots \subseteq R^i$

### 3) 证明 (数学归纳法)

令  $R' \subseteq R^+$ , 并证  $R' \subseteq t(R)$

证: 对  $\forall i, R^i \subseteq t(R)$

①  $i=1$  时,  $R \subseteq t(R)$  显然成立

②  $i=k$  时,  $R^k \subseteq t(R)$ , 则当  $i=k+1$  时,  $\forall (x, z) \in R^{k+1} = R^k \circ R$ , 必  $\exists y \in A$  使  $(x, y) \in R^k$  且  $(y, z) \in R \subseteq t(R)$ , 又  $t(R)$  可传递, 故  $(x, z) \in t(R)$

故得证.

其次,  $\because R' \circ R = (R \cup R^2 \cup \dots) \circ (R \cup R^2 \cup \dots) = R \cup R^3 \cup \dots \subseteq R'$

$\therefore R'$  传递且包含  $R$ .

$\therefore R' \subseteq t(R)$

$\therefore$  由传递性,  $R' = t(R)$

### eg. 按定理 4.5 求 $r(R), s(R), t(R)$

【例 4.14】令  $R$  是  $A = \{1, 2, 3\}$  上的一个二元关系,  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ , 则

$r(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$

$s(R) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$

求  $t(R)$  就比较麻烦了, 要先求出  $R^2, R^3, \dots$ , 再求并集. 在这个例子里

$R^2 = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$

$R^3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

$R^4 = R$

$R^5 = R^2$

$\vdots$

可见  $R^{2n+1} = R, R^{2n+2} = R^2, R^{2n+3} = R^3 (n=1, 2, \dots)$ , 故

$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 = A \times A$

从这个例题中可以看出  $R^i$  的计算一般是相当麻烦的. 但在计算  $R^i$  时可以发现有一定的规律可循, 事实上存在着求  $t(R)$  的有效方法.

### 一些约定:

$$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = t(R)$$

$$R^* = I_A \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = I_A \cup t(R)$$

**定理 4.6** 设  $A$  是  $n$  个元素的集合,  $R$  是  $A$  上的二元关系, 则存在正整数  $k (k \leq n)$ ,  
 $\exists t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^k$

**【证明】** 对任何  $(x, y) \in R^k = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$ , 必存在最小正整数  $k$ , 使得  $(x, y) \in R^k$ . 这表明存在  $A$  的元素序列  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  使  
 $xRa_1, a_1Ra_2, \dots, a_{k-1}Ra_k$

不妨设  $x=a_1, y=a_k$ . 如果  $k > n$ , 那么序列  $a_1, a_2, \dots, a_k$  中必有元素  $a_i = a_j$  而  $i < j$ , 这就导致  
 $a_iRa_{i+1}, a_{i+1}Ra_{i+2}, \dots, a_{j-1}Ra_j, a_jRa_{j+1}, \dots, a_{k-1}Ra_k$

这个序列比原有序列短了  $j-i$ , 且同时又有  $(x, y) \in R^{k-(j-i)}$ , 但  $k+(j-i) < k$ , 与  $k$  的最小性相矛盾, 表明只有  $k \leq n$ . 因此  
 $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^k (k \leq n)$

### • 闭包运算的性质

定理 4.7 设  $R_1, R_2$  是集合  $A$  上的关系, 且  $R_1 \subseteq R_2$ ,

则:

$$1) r(R_1) \subseteq r(R_2)$$

$$2) s(R_1) \subseteq s(R_2)$$

$$3) t(R_1) \subseteq t(R_2)$$

定理 4.8 设  $R$  是集合  $A$  上的关系, 则:

1) 若  $R$  是自反的, 则  $s(R), t(R)$  也是自反的

2) 若  $R$  是对称的, 则  $r(R), t(R)$  也是对称的

3) 若  $R$  是传递的, 则  $r(R)$  也是传递的

### • 多重闭包

定义 4.8 1) 集合  $A$  上的关系的自反对称闭包定义为:  $rs(R) = r(s(R))$

2) 集合  $A$  上的关系的自反传递闭包定义为:  $rt(R) = r(t(R))$

3) 集合  $A$  上的关系的对称传递闭包定义为:  $st(R) = s(t(R))$

同理, 我们还可定义  $sr(R), tr(R), ts(R), \dots$

设  $R, S$  是集合  $A$  上的关系

$R, S$  是  $\begin{cases} \text{自反} \Rightarrow R \circ S \text{ 自反} \\ \text{对称} \Rightarrow R \circ S \text{ 对称} \\ \text{传递} \Rightarrow R \circ S \text{ 传递} \end{cases}$

可以这样考虑:  $R \circ S$  人为地使运算有 3 方向, 因此传递多点关系的很难成立 (自反是容易)

定理 4.9 1)  $rs(R) = sr(R)$

$$\Rightarrow rt(R) = tr(R)$$

$$3) st(R) \subseteq ts(R)$$

$$\begin{aligned} \text{证: } 1) sr(R) &= s(r(I_A) \cup r(R)) = (r(I_A) \cup r(R)) \circ s(I_A) \\ &= R \cup I_A \cup R \circ I_A \\ &= (R \cup R^+) \cup I_A \\ &= s(R) \cup I_A \\ &= rs(R) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) tr(R) &= t(r(I_A) \cup r(R)) = (r(I_A) \cup r(R)) \circ t(I_A) \\ &= I_A \cup R \circ t(I_A) \\ &= I_A \cup tr(R) \\ &= tr(R) \end{aligned}$$

$$\therefore R \subseteq s(R)$$

$$\therefore t(R) \subseteq ts(R) \quad \text{定理 4.7}$$

$$\therefore st(R) \subseteq ts(R)$$

又  $ts(R)$  是传递的

$$\therefore st(R) = ts(R) \quad \text{定理 4.8}$$

$$\therefore st(R) \subseteq ts(R)$$