Ch 1 命题逻辑

iff： if and only if（当且仅当）

2025年9月8日　16:13

数理逻辑 强调推理，不考虑特定语句正误

命题逻辑又称 命题演算，或 语句逻辑.

定义 1.1 能够确切判断其结论是真是假的陈述句称为命题。该命题可以取一个"值"，称为真值。{ 真 1 (T)；假 0 (F) }

根据现有信息.

eg. 这菜辣了. × 无法判断　　今天是十月一日 √

$11+101=1000$ ×

非陈述语句都不是命题

不能判断真假的陈述句叫悖论

定义 1.2 用一个具体的命题代入命题标识符 P 的过程，称为对 P 的解释或赋值（指派）

{ 确定：命题常元（是命题）；非确定：命题变元（不是命题） }

（简单命题）

定义 1.3 凡是不能用联结词分解出更简单的子命题的命题 称为 原子命题，反之称为 复合命题。与原子命题对应的 命题标识符 叫做 原子命题变元.

① 否定连接词 ～（"非"）

☆ 命题中有"不""非"等有否定含义，一定要体现出 ～

② 合取 ∧（"与"）

└ 逻辑乘　※不是所有与都为 ∧

{ 既…又　并且；不仅…而且　和；虽然…但是　与 }

③ 析取 ∨（"或"）　eg. 李明与王冬是同学；TA打开书并开始读

└ 逻辑加.　eg. 我上街去书店或去看电影

④ 排斥或 ▽（"不可兼或"）

（异或）　eg. 我坐第三排或第四排

或 { 可兼或 ∨；不可兼或 ▽；近似或 }

· 教室里有30或40人 "大约"的意思

⑤ 条件 →（"则"）

P 前件/项　Q 后件/项　$P \to Q$ { P是Q充分条件；Q是P必要条件 }

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

[可允许 P、Q 之间无因果关系]

{ 如P则Q；只要P就Q；P仅当Q；只有Q才P；除非Q否则 ～P }

$P \to Q$ { $Q \to P$ 逆命题；$\sim P \to \sim Q$ 反命题；$\sim Q \to \sim P$ 逆反命题 }

{ 形式条件 命题；实质条件 命题 }

一个类似的比方：生活中大家希望的是既合理又合情。但机器不知道命题的文字含义，只能根据形式（即推理规则、公式描述规则等）来推理，只能够保证推理的过程正确即可，因此有可能得出人看起来很不合逻辑的结论（典型例子就是：我没有买到鱼，但我吃鱼），也就是说合理但不一定合情。

⑥ 双条件 ↔　{ 当且仅当；充分必要 }

（同或）

约定：优先级：～ > ∧ > ∨ > → > ↔

小结：联结词是句子真值与句子真值之间的联结，与句子内容无关

设命题 P：明天上午七点下雨；
Q：明天上午七点下雪；
R：我将去学校。
符号化下述语句：
1）如果明天上午七点不是雨夹雪，则我将去学校。
解：可符号化为：$\sim(P \wedge Q) \to R$。
2）如果明天上午七点不下雨并且不下雪，则我将去学校。
解：可符号化为：$(\sim P \wedge \sim Q) \to R$。
3）如果明天上午七点下雨或下雪，则我将不去学校。
解：可符号化为：$(P \vee Q) \to \sim R$。
4）明天上午我将雨雪无阻一定去学校。
解：可符号化为：
$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R) \vee$
$(P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge \sim Q \wedge R)$。
或 $((P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)$
$\vee (\sim P \wedge \sim Q)) \wedge R$。

☆ 不能写成R.（缺信息）

设命题 P：你陪伴我；
Q：你代我叫车子；
R：我将出去。
符号化下述语句：
(1). 除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去。
(2). 如果你陪伴我并且代我叫辆车子，则我将出去。
(3). 如果你不陪伴我或不代我叫辆车子，我将不出去。
解：句子(1)可符号化为：
$R \to (P \vee Q)$ 或 $\sim(P \vee Q) \to \sim R$。
句子(2)可符号化为：$(P \wedge Q) \to R$。
句子(3)可符号化为：$(\sim P) \vee (\sim Q) \to \sim R$

定义 1-2.1 命题公式/公式　合适公式：无歧义的公式

1）命题变元（原子命题变元）本身是一个公式

2）如 P·Q 是公式，$\sim P$、$P \wedge Q$、$P \vee Q$、$P \to Q$、$P \leftrightarrow Q$ 也是公式

定义 1-2.1 命题公式/公式　　　合适公式：无歧义的公式

1) 命题变元(原子命题变元)本身是一个公式

2) 如 P、Q是公式，$\sim P$、$P\wedge Q$、$P\vee Q$、$P\rightarrow Q$、$P\leftrightarrow Q$ 也是公式

3) 命题公式仅由有限步使用 1-2 后产生的结果

定义 1-2.2 子公式

定义 1-2.3　命题变元的真值 → 公式的解释 I

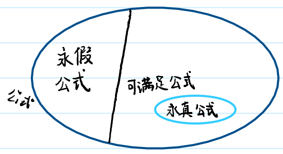
　　　　　　n个　　　　　　　　2^n个

定义 1-2.4　公式G在解释I下 {真　I 满足G；假　I 弄假G

将公式G在其所有可能解释下的真值情况列成的表，称为真值表

定义 1-2.5　永真公式/重言式

　　　　　　永假公式/矛盾式/不可满足公式



判断永真式 {真值表法；置换/代换/代入法则；公式推演法.

置换定理：永真式的任何置换实例仍是一个永真式

定义 1-3.1　在任意 I 下，G与H 真值相同 ⇒ G.H等价，记作 G⇔H

定理 1-3.2　公式G.H等价的充要条件是公式 G↔H是永真公式

用计算机证明：计算真值表

充分性：∵ 公式G.H等价

∴ G⇔H

∴ 由定义，对任何解释公式G和H取相同的真值

∴ G↔H 恒取真值1.

∴ G↔H 是永真式

必要性：∵ G↔H是永真式

∴ 对任何解释 G.H必取相同的真值

∴ G⇔H成立

基本等价式—命题定律 Equivalence：

设G，H，S是任何的公式，则：

1) E_1: $(G\leftrightarrow H)\Leftrightarrow(G\rightarrow H)\wedge(H\rightarrow G)$ (等价)

2) E_2: $(G\rightarrow H)\Leftrightarrow(\sim G\vee H)$ (蕴涵)

3) E_3: $G\vee G\Leftrightarrow G$ (幂等律)

E_4: $G\wedge G\Leftrightarrow G$

4) E_5: $G\vee H\Leftrightarrow H\vee G$ (交换律)

E_6: $G\wedge H\Leftrightarrow H\wedge G$

5) E_7: $G\vee(H\vee S)\Leftrightarrow(G\vee H)\vee S$ (结合律)

E_8: $G\wedge(H\wedge S)\Leftrightarrow(G\wedge H)\wedge S$

6) E_9: $G\vee(G\wedge H)\Leftrightarrow G$ (吸收律)

E_{10}: $G\wedge(G\vee H)\Leftrightarrow G$

基本等价式（续）：

7) E_{11}: $G\vee(H\wedge S)\Leftrightarrow(G\vee H)\wedge(G\vee S)$ (分配律)

E_{12}: $G\wedge(H\vee S)\Leftrightarrow(G\wedge H)\vee(G\wedge S)$

8) E_{13}: $G\vee F\Leftrightarrow G$ (同一律)

E_{14}: $G\wedge T\Leftrightarrow G$

9) E_{15}: $G\vee T\Leftrightarrow T$ (零律)

E_{16}: $G\wedge F\Leftrightarrow F$

10) E_{17}: $G\vee\sim G\Leftrightarrow T$ (矛盾律)

11) E_{18}: $G\wedge\sim G\Leftrightarrow F$

12) E_{19}: $\sim(\sim G)\Leftrightarrow G$ (双重否定律)

13) E_{20}: $(G\wedge H\rightarrow S)\Leftrightarrow G\rightarrow(H\rightarrow S)$ (输出律) ✓ "没有条件，便创造条件" "万事俱备"

14) E_{21}: $(G\bar{\vee}H)\Leftrightarrow(\sim G\wedge H)\vee(G\wedge\sim H)$ (排中律)

15) E_{22}: $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\sim Q\rightarrow\sim P$ (逆反律) ✓

16) E_{23}: $\sim(G\vee H)\Leftrightarrow\sim G\wedge\sim H$ (De Morgan定律)

E_{24}: $\sim(G\wedge H)\Leftrightarrow\sim G\vee\sim H$。

重要例题 (通常不使用真值表)

2）.公式推演（等价变换）

例3.1：试证 $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\sim Q\rightarrow\sim P$

证：$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\sim P\vee Q$　蕴涵　E_2

$\Leftrightarrow\sim P\vee\sim\sim Q$　双重否定 E_{19}

$\Leftrightarrow\sim\sim Q\vee\sim P$　交换律　E_5

$\Leftrightarrow\sim Q\rightarrow\sim P$　　E_2

证明 $P\vee\sim((P\vee\sim Q)\wedge Q)$ 是永真公式。

证：原式 $=P\vee\sim(P\vee\sim Q)\vee\sim Q$

$=P\vee\sim P\wedge Q\vee\sim Q$

$=(P\vee\sim P)\wedge(Q\vee\sim Q)$

$=1\wedge1$

$=1$

证明 $P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow R$

$P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow\sim P\vee(\sim Q\vee R)$

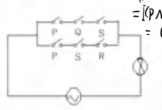
$\Leftrightarrow(\sim P\vee\sim Q)\vee R$

$\Leftrightarrow\sim(P\wedge Q)\vee R\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow R$

试证明 $(P\wedge(Q\vee R))\vee(P\wedge\sim Q\wedge\sim R)\Leftrightarrow P$

$\Leftrightarrow(P\wedge(Q\vee R))\vee(P\wedge\sim(Q\vee R))\Leftrightarrow P\wedge T\Leftrightarrow P$

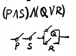
试用较少的开关设计一个与下图有相同功能的电路。



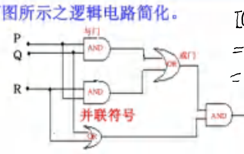
$(P\wedge Q\wedge S)\vee(P\wedge S\wedge R)$

$=[(P\wedge S)\wedge Q]\vee[(P\wedge S)\wedge R]$

$=(P\wedge S)\wedge(Q\vee R)$



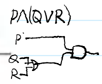
试将下图所示之逻辑电路简化。



$[(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)]\wedge(Q\vee R)$

$=(P\wedge(Q\vee R))\wedge(Q\vee R)$

$=P\wedge(Q\vee R)$



试证明：

$(\sim P\wedge(\sim Q\wedge R))\vee((Q\wedge R)\vee(P\wedge R))\Leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow((\sim P\wedge\sim Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)$

$\Leftrightarrow(\sim(Q\vee P)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)$

$\Leftrightarrow T\wedge R\Leftrightarrow R$

将下面一段程序简化：

```
If A∧B then
   If B∨C then
      X
   Else
      Y
   End
```

执行程序段X 的条件为

$((A\wedge B)\wedge(B\vee C))\vee(\sim(A\wedge B)\wedge\sim(A\wedge C))$

$\Leftrightarrow\sim(A\wedge\sim B\wedge C)$

执行程序段Y的条件为

$((A\wedge B)\wedge\sim(B\vee C))\vee(\sim(A\wedge B)$

将下面一段程序简化：

```
If A∧B then
    If B∨C then
        X
    Else
        Y
    End
Else
    If A∧C then
        Y
    Else
        X
    End
End
```

执行程序段X 的条件为

$((A\wedge B)\wedge(B\vee C))\vee(\sim(A\wedge B)\wedge\sim(A\wedge C))$

$\Leftrightarrow\sim(A\wedge\sim B\wedge C)$

执行程序段Y的条件为

$((A\wedge B)\wedge\sim(B\vee C))\vee(\sim(A\wedge B)\wedge(A\wedge C))$

$\Leftrightarrow A\wedge\sim B\wedge C$

```
If A∧~B∧C then
    Y
Else
    X
End
```

对偶式： A中的"∨"与"∧"，"T"与"F" 互换，得 A对偶式 A^*

引理（定理1-3.3） $\sim A(P_1,\cdots,P_n)\Leftrightarrow A^*(\sim P_1,\cdots,\sim P_n)$

证明： De Morgan： $\sim(P\vee Q)\Leftrightarrow\sim P\wedge\sim Q$，$\sim(P\wedge Q)\Leftrightarrow\sim P\vee\sim Q$

又： $\sim T\Leftrightarrow F$，$\sim F\Leftrightarrow T$

∴对公式的否定可以直接作用到原子本身.

∴ $\sim A(P_1,\cdots,P_n)\Leftrightarrow A^*(\sim P_1,\cdots,\sim P_n)$

对偶定理：$(A\Leftrightarrow B)\rightarrow(A^*\Leftrightarrow B^*)$

证明： 设 $A(P_1,\cdots,P_n)\Leftrightarrow B(P_1,\cdots,P_n)$. 于是 $A(P_1,\cdots,P_n)\leftrightarrow B(P_1,\cdots,P_n)$ 是永真式

∴ $A(\sim P_1,\cdots,\sim P_n)\Leftrightarrow B(\sim P_1,\cdots,\sim P_n)$

∴ $A(\sim P_1,\cdots,\sim P_n)\Leftrightarrow B(\sim P_1,\cdots,\sim P_n)$

∴ $A^*(P_1,\cdots,P_n)\Leftrightarrow B^*(P_1,\cdots,P_n)$

定义 1-4.1 $P\uparrow Q$：与非； $P\downarrow Q$：或非 $P\overset{c}{\nrightarrow}Q$：条件否定

$\sim(P\wedge Q)$ $\sim(P\vee Q)$ $\sim(P\rightarrow Q)$

①$P\uparrow P\Leftrightarrow\sim(P\wedge P)\Leftrightarrow\sim P$

②$(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q)\Leftrightarrow\sim(P\uparrow Q)\Leftrightarrow P\wedge Q$

③$(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q)\Leftrightarrow\sim P\uparrow\sim Q\Leftrightarrow\sim(\sim P\wedge\sim Q)\Leftrightarrow P\vee Q$

④$P\downarrow P\Leftrightarrow\sim(P\vee P)\Leftrightarrow\sim P$

⑤$(P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q)\Leftrightarrow\sim(P\downarrow Q)\Leftrightarrow P\vee Q$

⑥$(P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q)\Leftrightarrow\sim P\downarrow\sim Q\Leftrightarrow\sim(\sim P\vee\sim Q)\Leftrightarrow P\wedge Q$

定义 1-4.2 功能完备集， 最小功能完备集 $\{\uparrow\}$

$\{\downarrow\}$

$\{\sim,\vee\}$

$\{\sim,\wedge\}$

$\{\sim,\rightarrow\}$

定义 1-5.1 原子公式及其否定都称为句节（正/负句节）

有限个句节组成的析取式称为子句。有限个子句组成的合取式称为合取范式。 $(\vee)\wedge(\vee)$

有限个句节组成的合取式称为短语。有限个短语组成的合取式称为析取范式。 $(\wedge)\vee(\wedge)$

※ P. ~P 是句节、子句、短语、合取范式、析取范式

$(P\vee Q\vee\sim R)$是析取范式、子句 是合取范式、子句

$\sim(Q\vee R)$ 均不是，但 $\sim Q\wedge\sim R$ 是合取范式

定理 1-5.2（范式存在定理）任何命题公式都存在与之等价的合取范式与析取范式。

eg. 求 $(P\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow S$ 的合取范式

解： 原式 $\Leftrightarrow\sim(P\wedge(\sim Q\vee R))\vee S$ ∨∧∨

$\Leftrightarrow\sim(P\vee S)\wedge((Q\wedge\sim R)\vee S)$

$\Leftrightarrow\sim(P\vee S)\wedge(Q\vee S)\wedge(\sim R\vee S)$

易知一个公式的范式不唯一，因此要求公式由主范式

定义 1.17 (1) 在n个变元的基本积（短语）中，若每一个变元与其否定并不同时存在，且二者之一必出现且仅出现一次，则称这种基本积为极小项

(2) 子句 极大项

由有限个极小项组成的析取式 称为 主析取范式

大 合取式 主合取范式

极小项与极大项的性质

①没有两个不同的极小项是等价的，且每个极小项只有一组真值指派，使该极小项的真值为真。

②没有两个不同的极大项是等价的，且每个极大项只有一组真值指派，使该极大项的真值为假。

③$\sim m_i\Leftrightarrow M_i$，$\sim M_i\Leftrightarrow m_i$（$i=0,1,2,\cdots,2^n-1$）。

④$M_i\vee M_j=T$，$m_i\wedge m_j=F$（$i\neq j$；$i,j\in\{0,1,2,\cdots,2^n-1\}$）。

⑤$\bigvee_{i=0}^{2^n-1}m_i=T$，$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1}M_i=F$。

⑥极大项取值 0 "当且仅当"：如果极大项中出现的是原子本身，则原子赋值为 0；如果出现的是原子的否定，则原子赋值为 1。

⑦当一个极大项在一种解释下取值 0 时，其余极大项在同一解释下取值 1。

⑧极小项取值 1 "当且仅当"：如果极小项中出现的是原子本身，则原子赋值为 1；如果出现的是原子的否定，则原子赋值为 0。

⑨当一个极小项在一种解释下取值 1 时，其余极小项在同一解释下取值 0。

eg. 求 $G=(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$ 主合（析）取范式 POS 最大和之积

解： P Q R $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

eg. 求 $G=(P\to Q)\leftrightarrow R$ 主合析取范式　　POS 最大和之积

解:

P	Q	R	$(P\to Q)\leftrightarrow R$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$G=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\sim Q\vee R)\wedge(\sim P\vee Q\vee\sim R)\wedge(\sim P\vee\sim Q\vee R)$

$G=(\sim P\wedge\sim Q\wedge R)\vee(\sim P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\sim Q\wedge\sim R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

公式转换法:

1）利用等价公式中的等价式和蕴涵式将公式中的→、↔用联结词～、∧、∨来取代;
2）利用德•摩根定律将否定号～移到各个命题变元的前端;
3）利用结合律、分配律、吸收律、幂等律、交换律等将公式化成其等价的析取范式和合取范式。
4）在析取范式的短语和合取范式的子句中，如同一命题变元出现多次，则将其化成只出现一次。
5）**去掉析取范式中所有永假式的短语和合取范式中所有永真式的子句，即去掉短语中含有形如P∧～P的子公式和子句中含有形如P∨～P的子公式。**
6）若析取范式的某一个短语中缺少该命题公式中所规定的命题变元P，则可用公式:
（～P∨P）∧Q=Q
将命题变元P补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的短语，此时得到的短语将是标准的极小项。
7）若合取范式的某一个子句中缺少该命题公式中所规定的命题变元P，则可用公式:
（～P∧P）∨Q=Q
将命题变元P补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的子句，此时得到的子句将是标准的极大项。
8）**利用幂等律将相同的极小项和极大项合并，同时利用交换律进行顺序调整，由此可转换成标准的主析取范式和主合取范式。**

命题公式的蕴涵

设A和B是两个合适公式，如果在任何解释下，A取值1时B也取值1，则称公式A蕴涵公式B，并记$A\Rightarrow B$.（不考虑A为0情况）

$A\Rightarrow B$ 当且仅当 $A\to B$ 为永真式

蕴涵的性质: 1. 自反性 $A\Rightarrow A$

2. 反对称性 if $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，$A\Leftrightarrow B$
3. $A\Rightarrow B$ 且 A为永真式，则B必为永真式
4. 传递性. if $A\Rightarrow B$，$B\Rightarrow C$，则$A\Rightarrow C$

证: 由已知，$(A\to B)\wedge(B\to C)$ 为永真式
又 $(A\to B)\wedge(B\to C)\Rightarrow A\to C$
∴ $A\to C$ 为永真式
∴ $A\Rightarrow C$

5. if $A\Rightarrow B$，$A\Rightarrow C$，则 $A\Rightarrow B\wedge C$　　反之亦然

证: 由已知，$A\to B$、$A\to C$ 都永真
∴ $(A\to B)\wedge(A\to C)$ 永真
$(A\to B)\wedge(A\to C)\Leftrightarrow(\sim A\vee B)\wedge(\sim A\vee C)\Leftrightarrow\sim A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow A\to(B\wedge C)$　永真
∴ $A\Rightarrow B\wedge C$

6. if $A\Rightarrow C$，$B\Rightarrow C$，则 $A\vee B\Rightarrow C$

证: 由已知，$(A\to C)\wedge(B\to C)$ 永真，
∴ $(A\vee B)\to C$ 永真 …

7. $A\wedge B\Rightarrow C$ 当且仅当 $A\Rightarrow B\to C$.

该性质是推理演算中 CP 规则的基础

证: 充分性 ∵ $A\wedge B\Rightarrow C$
∴ $A\wedge B\to C$ 永真
∴ $\sim A\vee\sim B\vee C\Leftrightarrow\sim A\vee(B\to C)\Leftrightarrow A\to(B\to C)$ 永真 …
必要性 ∵ $A\Rightarrow B\to C$
∴ $A\to(B\to C)$ 永真

∴ [illegible]

必要性

∵ $A \Rightarrow B \to C$

∴ $A \to (B \to C)$ 永真

∴ $A \land B \to C$ 永真

∴ $A \land B \Rightarrow C$.

8. $A \Rightarrow B$, iff $A \land \sim B$ 是矛盾式

定理1.12：

基本蕴含(关系)式(蕴含定律)：

I_1: 上课 $P \Rightarrow$ 上课且 想点奶茶 $P \lor Q$, $Q \Rightarrow P \lor Q$

扩充法则 <析取引入律> $\sim P \Rightarrow \overset{\sim P \lor Q}{P \to Q}$, $Q \Rightarrow \overset{Q \lor \sim P}{P \to Q}$

(上课) 知识1 知识2 (只学了)知识1

I_2: $P \land Q \Rightarrow P$, $P \land Q \Rightarrow Q$

化简法则 <合取消去律> $\overset{\sim(\sim P \lor Q) \to P \land \sim Q}{\sim(P \to Q) \Rightarrow P}$, $\sim(P \to Q) \Rightarrow \sim Q$

I_3: $P \land (\overset{\sim P \lor Q}{P \to Q}) \Rightarrow Q$

$(P \land \sim P) \lor (P \land Q) \to (P \land Q)$

假言推论 <分离规则>

I_4: $\sim Q \land (\overset{\sim P \lor Q}{P \to Q}) \Rightarrow \sim P$

否定式 假言推论

I_5: $\sim P \land (P \lor Q) \Rightarrow Q$

析取三段论

I_6: $(P \to Q) \land (Q \to R) \Rightarrow P \to R$

假言三段论

I_7: $(P \lor Q) \land (P \to R) \land (Q \to R) \Rightarrow R$

二难推论

I_8: $(P \to Q) \land (R \to S) \Rightarrow (P \land R) \to (Q \land S)$

I_9: $(P \leftrightarrow Q) \land (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$

I_{10}: $(P \lor Q) \land (\sim P \lor R) \Rightarrow Q \lor R$ 归结原理

命题逻辑的推理方法

推理规则：

1. P规则 (前提引用规则)
2. T规则 (逻辑(中间)结果引用规则) 依据 { 等价式 TE, 蕴涵式 TL }
3. CP规则 (附加前提规则)

└★"形如 $B \to C$" eg. $\sim B \lor C$

① $\sim B \lor C$ P
② $B \to C$ T①E
③ B P(假设前提)
……
ⓝ C
ⓝ⁺¹ $B \to C$ CP

【例 1.21】 证明 $R \to S$ 是 $\{P \to (Q \to S), \sim R \lor P, Q\}$ 的逻辑结果。

【证明一】 直接法

步 骤	公 式	使用规则	步 骤	公 式	使用规则
1	$\sim R \lor P$	P	5	$\sim R \lor \sim Q \lor S$	T④E
2	$R \to P$	T①E	6	$Q \to (R \to S)$	T⑤E
3	$P \to (Q \to S)$	P	7	Q	P
4	$R \to (Q \to S)$	T②，③I	8	$R \to S$	T⑥，⑦I

【证明二】 利用 CP 规则法

步 骤	公 式	使用规则	步 骤	公 式	使用规则
1	$\sim R \lor P$	P	5	$Q \to S$	T③，④I
2	R	P（附加前提）	6	Q	P
3	P	T①，②I	7	S	T⑤，⑥I
4	$P \to (Q \to S)$	P	8	$R \to S$	CP②，⑦

【证明三】 反证法

步 骤	公 式	使用规则	步 骤	公 式	使用规则
1	$\sim(R \to S)$	P ~~(附加前提)~~ 假设前提	7	$P \to (Q \to S)$	P
2	$R \land \sim S$	T①E	8	$Q \to S$	T⑥，⑦I
3	R	T②I	9	Q	P
4	$\sim S$	T②I	10	S	T⑧，⑨I
5	$\sim R \lor P$	P	11	F(矛盾式)	T④，⑩E
6	P	T③，⑤I			

$$P, P \to Q \Rightarrow Q$$

为基础的方法，其实就是由子句 P 和 $\sim P \vee Q$ 中消去互反的一对句节（P 和 $\sim P$）后得到 Q 的，一般有下述规则：

消解规则 设 C_1 和 C_2 是两个子句，如果 C_1 中有句节 P，C_2 中有句节 $\sim P$，则从 C_1 中消去 P，从 C_2 中消去 $\sim P$ 后，由剩下的全部句节构成的析取式作为新的子句，称为 C_1 和 C_2 的消解式。例如，设 $C_1 = \sim P \vee Q \vee \sim R$，$C_2 = P \vee R \vee S$，它们有两对互反句节（$\sim P$ 和 P，$\sim R$ 和 R），消去后则得到消解式 $C_3 = Q \vee S$。

对每个已知条件分别求合取范式

利用消解的方法构造证明，首先要把结论的否定作为附加前提，再把由这些前提组成的合取式转化为合取范式，然后以合取范式中的全部子句为对象集使用消解规则。如果在某个步骤导出了矛盾式（称为空子句，记为□），则证明了原蕴涵关系的成立。所以，消解证明法是反证法的一种形式。

【例 1.23】 利用消解法，证明 $P \to (Q \to S)$，$\sim R \vee P$，$Q \Rightarrow R \to S$。

【解】 首先把结论否定后加入前提中，并构造由前提组成的合取式，再把合取式化为合取范式，其过程如下：

$$\begin{aligned}
&(P \to (Q \to S)) \wedge (\sim R \vee P) \wedge Q \wedge \sim (R \to S) \\
\Leftrightarrow &(\sim P \vee \sim Q \vee S) \wedge (\sim R \vee P) \wedge Q \wedge (R \wedge \sim S) \\
\Leftrightarrow &(\sim P \vee \sim Q \vee S) \wedge (\sim R \vee P) \wedge Q \wedge R \wedge \sim S
\end{aligned}$$

由此得到子句集 $\{\sim P \vee \sim Q \vee S, \sim R \vee P, Q, R, \sim S\}$，对这些子句应用消解方法，得到的消解式也要加入到子句集中，直至导出空子句。消解步骤如下：

步骤	公式	使用规则	步骤	公式	使用规则
1	$\sim P \vee \sim Q \vee S$	引用子句	6	$\sim R \vee P$	引用子句
2	Q	引用子句	7	$\sim R$	5 和 6 中消除 $\sim P$ 和 P
3	$\sim P \vee S$	1 和 2 中消除 $\sim Q$ 和 Q	8	R	引用子句
4	$\sim S$	引用子句	9	□	导出空子句
5	$\sim P$	3 和 4 中消除 $\sim S$ 和 S			

消解法（原理）（归结推理法）

- 为了证明 $G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$，根据反证法，即只需证明：$G_1, G_2, \cdots, G_n, \sim H \Rightarrow F$
- **利用消解规则进行推理，其推理过程为：**

1) 从 $\{G_1, G_2, \cdots, G_n, \sim H\}$ 出发。
2) 将 $G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \wedge \sim H$ 转化成合取范式，如：$P \wedge (P \vee R) \wedge (\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \vee R)$ 的形式。
3) 将合取范式中的所有子句（析取式）构成子句集合S，如：S={P, P∨R, ~P∨Q, ~P∨R}
4) 对S使用消解规则：对S的子句作归结，即消除互补式（互反对），如子句P∨R与~P∨Q作归结，得归结式R∨Q并将这归结式仍放S中，重复这一过程。
5) 直至归结出矛盾式（称为空子句，记为□）

因此，其消解过程就是对S的子句求消解式的过程。